

2.2.13 Slovní úlohy vedoucí na lineární rovnice IV

Předpoklady: 2212

Pedagogická poznámka: I příklady na společné splnění úkolu jsou do dvou hodin rozděleny schválně ze stejného důvodu jako příklady na vytváření směsí.

Př. 1: Jakou hlavní myšlenku používáme při řešení příkladů na společné plnění úkolu (společnou práci)?

Když sečteme, jakou část úkolů vykonají všichni pracovníci, dostaneme celý zadaný úkol.

Př. 2: Sestav rovnice pro řešení následujících příkladů. Rovnice neřeš.

- Učitel začátečník zkontroluje 350 položek inventárního seznamu za 8 hodin čistého času, jeho zkušenější kolega stihne kontrolu za 5 hodin. Jak dlouho bude začátečník kontrolovat, jestliže mu jeho zkušenější kolega přijde pomoci po dvou hodinách a zbytek práce pak dokončí společně?
- Produkcí jogurtů zajišťují tři stejné linky, každá z nich vyrobí kamión jogurtů za dvě hodiny. Za jak dlouho vyrobí kamión produktů všechny tři linky dohromady, jestliže druhá se rozběhne deset minut po první a třetí pracuje jen polovinu doby, po kterou je spuštěna první linka?
- Produkcí jogurtů zajišťují tři linky, dohromady vyrobily kamión jogurtů za dvě hodiny. Za jak dlouho by vyrobila kamión produktů každá zvlášť, jestliže výkon druhé je o deset procent a výkon třetí dokonce o polovinu větší než první?
- Adam by jednu stranu čtvercového výkopu vykopal za tři hodiny, Bedřich za čtyři. Za jak dlouho společně vykopají celý výkop, jestliže Adam přijde do práce o půl hodiny později?
- Učitel začátečník proškrtá dvě stě stran vyplněné třídnice za 5 hodin, učitel s praxí za dobu o dvě hodiny kratší. Jak dlouho budou vyškrtávat společně 8 třídnic, jestliže začátečník začne o půl hodiny dříve?

a) Učitel začátečník zkontroluje 350 položek inventárního seznamu za 8 hodin čistého času, jeho zkušenější kolega stihne kontrolu za 5 hodin. Jak dlouho bude začátečník kontrolovat, jestliže mu jeho zkušenější kolega přijde pomoci po dvou hodinách a zbytek práce pak dokončí společně?

Práce vykonaná začátečníkem ... $x \cdot \frac{1}{8}$ (počet hodin · část práce za 1 hodinu)

Práce vykonaná kolegou ... $(x-2) \cdot \frac{1}{5}$ (počet hodin · část práce za 1 hodinu)

Číslo 350 nehraje v řešení příkladu roli (zajímá nás kontrola celého seznamu, ne jednotlivých položek)

$$x \frac{1}{8} + (x-2) \frac{1}{5} = 1$$

b) Produkcí jogurtů zajišťují tři stejné linky, každá z nich vyrobí kamión jogurtů za dvě hodiny. Za jak dlouho vyrobí kamión produktů všechny tři linky dohromady, jestliže druhá se rozběhne deset minut po první a třetí pracuje jen polovinu doby, po kterou je spuštěna první linka?

Každá ze tří linek vyrobí za 1 hodinu $\frac{1}{2}$ kamiónů jogurtů. První linka pracuje x hodin, druhá linka o deset minut méně $x - \frac{10}{60} = x - \frac{1}{6}$, třetí jen polovinu doby $\frac{x}{2}$

$$x \cdot \frac{1}{2} + \left(x - \frac{1}{6}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

c) Produkci jogurtů zajišťují tři linky, dohromady vyrobily kamión jogurtů za dvě hodiny. Za jak dlouho by vyrobila kamión produktů každá zvlášť, jestliže výkon druhé je o deset procent a výkon třetí dokonce o polovinu větší než první?

První linka vyrobí jogurty za x hodin \Rightarrow za 1 hodinu $\frac{1}{x} \Rightarrow$ za 2 hodiny $2 \cdot \frac{1}{x}$ kamiónu.

Druhá linka výkon o 10 % vyšší \Rightarrow 1,1 výkonu první linky \Rightarrow za 2 hodiny $2 \cdot \frac{1,1}{x}$ kamiónu.

Třetí linka výkon o polovinu vyšší \Rightarrow $\frac{3}{2}$ výkonu první linky \Rightarrow za 2 hodiny $\frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{x}$ kamiónu.

Celkem všechny tři linky naplní jeden kamión $2 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot 1,1 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} = 1$.

d) Adam by jednu stranu čtvercového výkopu vykopal za tři hodiny, Bedřich za čtyři. Za jak dlouho společně vykopají celý výkop, jestliže Adam přijde do práce o půl hodiny později?

Práce vykonaná Adamem ... $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3}$ (počet hodin \cdot část práce za 1 hodinu)

Práce vykonaná Bedřichem ... $x \cdot \frac{1}{4}$ (počet hodin \cdot část práce za 1 hodinu)

Na pravé straně je 4, protože musí vykopat čtyři strany výkopu.

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} + x \cdot \frac{1}{4} = 4$$

e) Učitel začátečník proškrtá dvě stě stran vyplněné třídnice za 5 hodin, učitel s praxí za dobu o dvě hodiny kratší. Jak dlouho budou vyškrtávat společně 8 třídnic, jestliže začátečník začne o půl hodiny dříve?

Práce vykonaná začátečníkem ... $\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{5}$ (počet hodin \cdot část práce za 1 hodinu)

Práce vykonaná kolegou ... $x \cdot \frac{1}{3}$ (počet hodin \cdot část práce za 1 hodinu, stíhá proškrtat jednu třídnici za 3 hodiny)

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{5} + x \cdot \frac{1}{3} = 8$$

Př. 3: V čem bod e) posledního příkladu špatně zachycuje skutečnost?

Jednu třídnici může najednou proškrtávat pouze jeden člověk \Rightarrow na proškrtávání poslední třídnice nebudou učitelé moci spolupracovat \Rightarrow výpočet by byl správný pouze za předpokladu, že oba dokončí proškrtávání své poslední třídnice společně.

Př. 4: Vymysli k následujícím rovnicím slovní zadání na společné dosahování cíle.

a) $1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{6} \right)$

b) $x \cdot \frac{1}{3} + x \cdot \frac{1}{4} = 1$

c) $1 = \frac{1}{4} + 2 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{6} \right)$

d) $(x+3) \cdot \frac{1}{12} + x \cdot \frac{1}{15} = 1$

e) $1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$

a) $1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{6} \right)$

Petr poseká louku sám za 6 hodin. Za jak dlouho by louku posekal sám Jarda, když ji společně s Petrem posekal za 4 hodin?

b) $x \cdot \frac{1}{3} + x \cdot \frac{1}{4} = 1$

Otesán vypije rybník za tři hodiny, Otesánek za čtyři. Za jak dlouho vypijí rybník společně?

c) $1 = \frac{1}{4} + 2 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{6} \right)$

Pepa vystřílí všechny padouchy v levelu za 6 minut. Za jak dlouho by všechny padouchy vystřílel Radek, když spolu s Pepou vystříleli tři čtvrtiny padouchů ve dvou minutách?

d) $(x+3) \cdot \frac{1}{12} + x \cdot \frac{1}{15} = 1$

Ivan s Johnem chytají lelky. Ivan by všechny pochytil za 12 hodin, John za 15. Ivan začne chytat a John mu po třech hodinách začne pomáhat. Za jak dlouho od tohoto okamžiku budou s chytáním hotoví?

e) $1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$

Záleží na pojetí.

Bára s Cilkou tlučou špačky. Každá z nich by samostatně stihla všechny potlouct za dvě hodiny. Jak dlouho musí Cilka tlučit, když jí Bára pomáhala pouze dvacet minut?

Bára s Cilkou tlučou špačky. Společně je potloukly za půl hodiny. Za jak dlouho by je potloukla samotná Cilka, když Bára je samostatně potluče za tři hodiny?

Př. 5: Maminka s Jarmilkou motají 50 tvarohových knedlíků. Maminka dokáže za minutu smotat pět knedlíků, Jarmilka jenom tři. Jak dlouho maminka motala knedlíky, když zavolala Jarmilku po dvou minutách práce, aby jí pomohla?

Maminka: za 1 minutu 5 knedlíků ... za x minut $5x$ knedlíků

Jarmilka: za 1 minutu 3 knedlíky ... za $(x-2)$ minut $3(x-2)$ knedlíků

Společně smotají 50 knedlíků: $5x + 3(x-2) = 50$

$$5x + 3x - 6 = 50$$

$$8x = 56$$

$$x = 7$$

Maminka smotá knedlíky za 7 minut.

Pedagogická poznámka: Zařazení předchozího příkladu je jasné. Žáci mají tendenci řešit všechny příklady, kde se něco dělá, stejně, i když situace je zcela jiná. Je třeba je

nutit, aby si vždy na začátku rozmysleli, jestli mohou postup na společnou práci použít.

Př. 6: Při stavbě přehrady je nutné dočasně přehradit kamením a zeminou tok řeky. Přehrazení se provádí tak, že se najednou z obou stran koryta staví proti sobě hráze, které se setkají uprostřed řeky. Na jedné straně řeky jsou vhodnější podmínky, proto by přehrazení celého koryta z této strany trvalo 30 hodin. Z druhé strany je stavba obtížnější, proto by odtud přehrazení celé řeky trvalo 40 hodin. Situaci ještě komplikuje fakt, že řeka materiál odnáší a v případě, že by se stavba v polovině zastavila, řeka by veškerý navezený materiál do 30 hodin odnesla. Jak dlouho by přehrazení z obou stran trvalo, pokud se práce na výhodnějším břehu zpozdily a začaly až pět hodin po začátku prací na druhém břehu?

Lepší strana 30 hodin \Rightarrow za 1 hodinu $\frac{1}{30}$ přehrady.

Horší strana 40 hodin \Rightarrow za 1 hodinu $\frac{1}{40}$ přehrady.

Řeka by za 30 hodin rozebrala polovinu přehrady \Rightarrow celou přehradu by rozbila za 60 hodin (fakticky je to nesmysl, protože ve chvíli, kdy je přehrada dokončena, přestane přetékat přes její kraje a odnášet materiál).

Řeka 60 hodin \Rightarrow za 1 hodinu $\frac{1}{60}$ přehrady (řeka přehradu rozbíjí \Rightarrow musíme její příspěvek odečítat).

Doba stavby přehrady od začátku na horším konci ... x
Část přehrady postavená z horšího konce + část postavená z lepšího konce = celá přehrada + materiál odnesený vodou během stavby: $x \frac{1}{40} + (x-5) \frac{1}{30} = 1 + x \frac{1}{60} \quad / \cdot 120$.

$$3x + 4(x-5) = 120 + 2x$$

$$3x + 4x - 20 = 120 + 2x$$

$$5x = 140$$

$$x = 28$$

Stavba přehrady trvala od zahájení prací 28 hodin.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je jednoduchý za předpokladu, že při výpočtu sledujeme postup stavby. Většina studentů ho opět nedokáže vyřešit. Ti lepší často ztroskotají na způsobu, kterým je v zadání popsán vliv řeky. Zapomínají, že uvedených 30 hodin se týká poloviny přehrady a při úvaze je třeba ho přepočítat na celou přehradu (tedy vynásobit dvěma).

Na závěr něco na nerovnice:

Př. 7: Pavlovi zvýšili od nového roku plat o 3600 Kč. Evě zvýšili plat pouze o 3% a přesto bylo její zvýšení větší než Pavlovo. Jaký je Evin plat?

Pavlovo zvýšení platu: 3600 Kč

Evin plat: x

Evino zvýšení platu: $0,03x$

$$0,03x > 3600$$

$$x > \frac{3600}{0,03} = 120000$$

Eva pobírá plat vyšší než 120 000 Kč měsíčně.

Poznámka: Rád bych upozornil na fakt, že předchozí příklad je genderově vyvážený a boří zažitě představy o nižších výdělcích zaměstnaných žen.

Pedagogická poznámka: Je až šokující, jak velké problémy některým studentům příklad působil. Zřejmě předpokládali, že půjde o podobný příklad s předchozími. Nejdůležitější je přesvědčit je, že z něj nemají dělat žádnou vědu a pouze srovnat, kolik dostal přidáno Pavel a kolik Eva. Většina z nich se však více než zadáním zabývá svou představou o příkladu a snaží se do porovnání zahrnout původní Pavlův plat, o kterém nejsou v zadání žádné informace.

Př. 8: Hnědé uhlí s odvozem stojí u místní firmy 260 Kč za metrák. Ve velkoobchodě vzdáleném 20 km je cena stejného uhlí pouze 230 Kč za metrák. Pronájem nákladního automobilu na odvoz uhlí z velkoobchodu vyjde na 1200 Kč. Od jakého minimálního množství uhlí se vyplatí nakupovat ve velkoobchodě?

Množství uhlí:	...	x
Cena za uhlí v místě:	...	$260x$
Cena za uhlí z velkoobchodu:	...	$230x + 1200$
		$230x + 1200 < 260x$
		$1200 < 30x$
		$x > 40$

Nákup ve velkoobchodu se vyplatí, pokud kupujeme víc než 40 metráků uhlí.

Na závěr si shrneme zkušenosti z posledních čtyř hodin:

Ukázali jsme si, že pomocí slovních úloh (a předtím třeba lineárních funkcí) je možné spočítat občas zcela nesmyslné, ale někdy i užitečné údaje. Právě v tom tkví okamžitá užitečnost matematiky.

Řešení všech slovních úloh mělo jedno společné:

- Nejdříve jsme museli (pokaždé jinak) sestavit podle zadání nějaké rovnice. V této činnosti jsme často selhávali a dělali naprostou většinu chyb.
- Vyřešení sestavené rovnice naopak bylo zcela rutinní záležitostí, při které stačilo dodržovat několik málo pravidel, a měli jsme jistotu správného výsledku.

Právě v tom tkví užitečnost rovnic. Jakmile je získáme, nemusíme se příliš strachovat o výsledek. Úspěch zajistí pouhé dodržování matematických pravidel.

Shrnutí: Velkou část úloh o společné práci můžeme řešit pomocí části práce, kterou je možné vykonat za jednotku času.